

## Gleichungen in der Mathematik

### 1. Einführung

Bisher bekannt:

$$T(x) = x^2 + 1$$

↑  
Variable, die ein Platzhalter für eine Zahl ist.

$$T(3) = 3^2 + 1 = 10 \Rightarrow T(3) = 10$$

↑  
Setzt man für die Variable eine Zahl ein, dann erhält man den Terwert für diese Einsetzung als Ergebnis.

$$\text{Neu: } \underbrace{x^2 + 1}_{T_1(x)} = \underbrace{2 \cdot x + 4}_{T_2(x)}$$

Definition

Werden zwei Terme  $T_1(x)$  und  $T_2(x)$  durch ein Gleichheitszeichen verbunden, nennt man dies Gleichung.

## 2. Lösungsmethoden für Gleichungen

Beispiel:  $x^2 + 1 = 2x + 4$

$$T_1(x) = T_2(x)$$

a) gezieltes Probieren

x	$T_1(x)$	$T_2(x)$	=?
-1	2	2	✓
2	5	8	✗
3	10	10	✓

Da die höchste Potenz von x den Exponenten 2 besitzt, hat die Gleichung höchstens zwei Lösungen. Diese werden in der Lösungsmenge zusammengefasst:

$$\mathbb{L} = \{-1; 3\}$$

### b) Methode der Umkehraufgabe

Beispiel: Finde die Lösung von folgender Gleichung.

$$3 \cdot x + 5 = -4$$

Umkehraufgabe 1:

$$3 \cdot x = -4 - 5$$

$$3 \cdot x = -9$$

Umkehraufgabe 2:

$$x = (-9) : 3$$

$$x = -3$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-3\}$$

Merksatz:

Beim Verfahren mit Umkehraufgaben muss die erste Umkehraufgabe so gewählt werden, dass auf einer Seite nur ein Produkt mit der Variable steht.

### c) Äquivalenzumformungen

Beispiel:  $3 \cdot x + 5 = 17$



Wage im Gleichgewicht

$$3x + 5 = 17$$

Ziel: Fluß der linken Seite nur rote Kugeln



Wage im Ungleichgewicht

$$3x + 5 - 5 < 17$$

Subtraktion beidseitig

$$3x + 5 - 5 = 17 - 5$$

$$3x = 12$$

$$:3 \quad \downarrow \quad :3$$

$$x = 4$$



Fluß beider Seiten werden die gleichen Rechenschritte durchgeführt.

### Formalisierung:

- Beispiel:  $4x + 7 = -21$
- 1. Schritt: Sortieren der Gleichung (Auf einer Seite nur Variablen, auf der anderen nur Zahlen)
 
$$4x + 7 = -21 \quad | -7$$

$$4x + 7 - 7 = -21 - 7$$

$$4x = -28$$
- 2. Schritt: Durch Division wird der Faktor vor der Variablen abgespalten
 
$$4 : 4 \cdot x = -28 : 4$$

$$x = -7$$

### Merkatz:

Einfache Gleichungen löst man in zwei Schritten: Im ersten sortiert man die Gleichung, im zweiten spaltet man den Faktor vor der Variablen durch Division ab.

### Beispiel 3: Löse folgende Gleichung

- $5x - 26 = 4 \quad | +26$ 

$$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{Gegenteil}}$$

$$5x - 26 + 26 = 4 + 26$$

$$5x = 30 \quad | :5$$

$$5 : 5 x = 30 : 5$$

$$x = 6$$
- Die Lösung der Gleichung ist damit 6. Immer durch die Zahl vor der Variable teilen.

### Übersicht: Lösen von Gleichungen

- gezieltes Probieren

x	x+5	2x
2	7	4
5	10	10

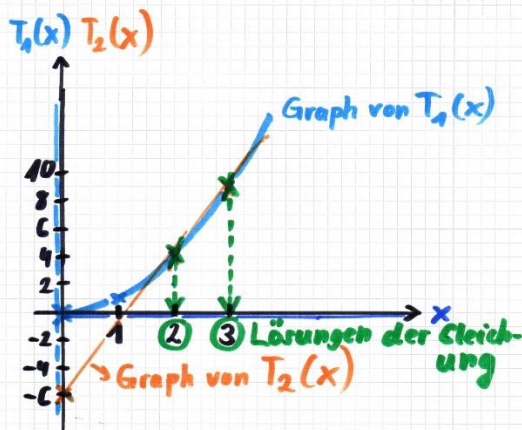
 $\Rightarrow \mathbb{L} = \{5\}$
  - Umkehraufgabe
 $3x + 4 = -5$   
 Umkehraufgabe 1:  
 $3x = -5 - 4$   
 $3x = -9$   
 Umkehraufgabe 2:  
 $x = -9 : 3 = -3$
- Gleichungen**
- Äquivalenzumformungen
 $5x - 4 = 4x + 2 \quad | -4x$   
 Sortieren der Gleichung  
 $5x - 4x - 4 = 2 \quad | +4$   
 $x = 2 + 4$   
 $x = 6$

### Graphische Lösung von Gleichungen

- Beispiel: Gesucht ist die Lösung der Gleichung
 
$$\underbrace{x^2}_{T_1(x)} = \underbrace{5x - 6}_{T_2(x)}$$
- Lösen durch Probieren mit Tabelle
 

x	x <sup>2</sup>	5x - 6
0	0 <sup>2</sup> = 0	5 · 0 - 6 = -6
1	1 <sup>2</sup> = 1	5 · 1 - 6 = -1
②	2 <sup>2</sup> = 4	5 · 2 - 6 = 4 ✓
③	3 <sup>2</sup> = 9	5 · 3 - 6 = 9 ✓





Merksatz:

Die Lösungen der Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittstellen der beiden Graphen von den Termen.

## Lösen von komplexen Gleichungen

- Beispiel: Löse folgende Gleichung:

$$(4x-3) \cdot (x+1) = 4x^2 - 2 \cdot (x-2)$$

Schritt 1: Ausmultiplizieren

$$4x \cdot x + 4x \cdot 1 - 3x - 3 = 4x^2 - 2x + 4$$

$$4x^2 + 4x - 3x - 3 = 4x^2 - 2x + 4$$

- Schritt 2: Auf beiden Seiten zusammenfassen

$$4x^2 + x - 3 = 4x^2 - 2x + 4 \quad | -4x^2$$

$$x - 3 = -2x + 4 \quad | +2x$$

Schritt 3: Sortieren der Gleichung

$$x + 2x - 3 = -2x + 2x + 4$$

$$3x - 3 = 4 \quad | +3$$

$$3x - 3 + 3 = 4 + 3$$

$$3x = 7 \quad | :3$$

Schritt 4: Division durch die Zahl vor der Variable

$$x = \frac{7}{3} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{7}{3} \right\}$$

## Merksatz

Eine komplexe Gleichung wird in folgenden Schritten gelöst:

- 1.) Ausmultiplizieren von vorhandenen Klammern.
- 2.) Zusammenfassen der beiden Seiten der Gleichung
- 3.) Sortieren der Gleichung
- 4.) Division der Gleichung durch die Zahl vor der Variablen.

Beispiel: Löse folgende Gleichung

$$(3x-5)(2x-3) = 4x(x-1) + 2x^2$$

$$6x^2 - 19x + 15 = 6x^2 - 4x$$

$$-19x + 15 = -4x \quad | +4x$$

$$-15x + 15 = 0 \quad | -15$$

$$-15x = -15 \quad | :(-15)$$

$$\underline{x = 1} \Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$$