Aufgaben zur Quantenmechanik

November 14, 2010

Bei der Rekonstruktion des Doppelspaltversuchs von Taylor wird eine Lichtquelle benutzt, die das Licht mit einer Wellenlänge von $620\,\mathrm{nm}$ emittiert. Das Licht trifft auf einen Doppelspalt mit dem Spaltabstand $d = 2{,}00\,\mathrm{mm}$.

1. Erkläre, warum man zunächst eine willkürliche Anordnung der Photonen auf der Fotoplatte feststellen wird.
2. Bestimme durch eine geeignete Rechnung die Ortsunschärfe für ein Photon am Interferenzmaximums erster Ordnung.
3. Erläutere wie sich die Ortsunschärfe des Photons der Interferenzmaxima höherer Ordnung entwickeln wird im Vergleich zu dem Maximum erster Ordnung. Ziehe zur Begründung auch geeignete Rechnungen zu Rate.
4. Bestimme die höchste Ordnung des Interferenzmaximas, das gerade noch zu beobachten ist.

- Willkürliche Photonenanordnung:

Lösung Heisenberg 1

- Willkürliche Photonenanordnung:
- Die Lichtquanten treffen auf jedem Ort der Fotoplatte mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf.

Lösung Heisenberg 1

- Willkürliche Photonenanordnung:
- Die Lichtquanten treffen auf jedem Ort der Fotoplatte mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf.
- Betrachtet man das Bild nach einer kurzen Belichtungszeit, dann sind erst wenige Photonen durch den Doppelspalt gedrungen. Deshalb kann man noch nicht die Bereiche auf der Fotoplatte feststellen, an denen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen von den Photonen höher ist, dies ist erst nach längerer Belichtungzeit möglich.

Heisenberg 2

- Impuls des Photons:
  $$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{620\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{620\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2{,}00\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$
  $$p = 3{,}32 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{Ns}$$

- Impuls des Photons:
  $$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{620 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{620 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$
  $$p = 3{,}32 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{Ns}$$

- Anwendung der Unschärferelation von Heisenberg:
  $$\Delta p_x \cdot \Delta x > h \Rightarrow \Delta x > \frac{h}{\Delta p}$$
  $$\Delta x > \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{3{,}32 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{Ns}}$$
  $$\Delta x > 2{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

- Impuls des Photons:
  $$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{620\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}} \cdot \frac{620\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{2{,}00\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$
  $$p = 3{,}32 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{Ns}$$
- Anwendung der Unschärferelation von Heisenberg:
  $$\Delta p_x \cdot \Delta x > h \Rightarrow \Delta x > \frac{h}{\Delta p}$$
  $$\Delta x > \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}}{3{,}32\cdot 10^{-31}\,\mathrm{Ns}}$$
  $$\Delta x > 2{,}00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
- Damit ist die Ortsunschärfe des Auftreffsort ist das 10 Milliardenfache des Atomradius.

Heisenberg 3

- Bedingung für das Interferenzmaximum k-ter Ordnung ist:
  $\sin \varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$

- Bedingung für das Interferenzmaximum k-ter Ordnung ist: $\sin \varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$
- Hinsichtlich der Impulsabweichung am Maximum dritter Ordnung gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi_k$

- Bedingung für das Interferenzmaximum k-ter Ordnung ist: $\sin \varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$
- Hinsichtlich der Impulsabweichung am Maximum dritter Ordnung gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi_k$
- Insgesamt gilt dann: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{k\lambda}{d}$

- Bedingung für das Interferenzmaximum k-ter Ordnung ist: $\sin\varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$
- Hinsichtlich der Impulsabweichung am Maximum dritter Ordnung gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\sin\varphi_k$
- Insgesamt gilt dann: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda}\cdot\frac{k\lambda}{d}$
- Damit gilt nach Heisenberg dann: $\Delta p_x \cdot \Delta x > kh$

- Bedingung für das Interferenzmaximum k-ter Ordnung ist: $\sin \varphi_k = \frac{k\lambda}{d}$
- Hinsichtlich der Impulsabweichung am Maximum dritter Ordnung gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin \varphi_k$
- Insgesamt gilt dann: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{k\lambda}{d}$
- Damit gilt nach Heisenberg dann: $\Delta p_x \cdot \Delta x > kh$
- Damit ist eine Zunahme der Ortsunschärfe für die Interferenzmaxima höherer Ordnung zu erwarten.

In einer Hochvakuumröhre werden Elektronen mit einer Spannung von $260\,\mathrm{V}$ beschleunigt. In der Röhre treffen die Elektronen auf eine Goldfolie mit einer Gitterkonstante von $1{,}30 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Der Leuchtschirm hat von der Goldfolie einen Abstand von $18{,}5\,\mathrm{cm}$.

1. Bestimme den Radius des Interferenzrings erster Ordnung.
2. Schätze mit einer geeigneten Rechnung die Ortsunschärfe eines Elektrons für den Interferenzrings erster Ordnung ab. Erkläre, was in Bezug auf die Ringbreite zu erwarten ist,wenn man eine Folie mit einem kleineren Abstand der Atome verwendet.
3. Nimm an, dass der Radius eines Elektrons $0{,}05\%$ des Atomradius beträgt. Ermittle die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons auf einer bestimmten Ortspositions des Interferenzrings und interpretiere dein Ergebnis.

- $R = L\frac{\lambda}{d}$

Elektronenbeugung 1

- $R = L\frac{\lambda}{d}$
- Geschwindigkeit der Elektronen $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 8{,}99 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

- $R = L\frac{\lambda}{d}$
- Geschwindigkeit der Elektronen $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 8{,}99 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Wellenlänge nach de Broglie: $\lambda = \frac{h}{mv} = 8{,}10 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$

- $R = L\frac{\lambda}{d}$
- Geschwindigkeit der Elektronen $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 8{,}99 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
- Wellenlänge nach de Broglie: $\lambda = \frac{h}{mv} = 8{,}10 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$
- Damit ist der Radius nach der ersten Formel zu berechnen und liefert den Wert $R = 11{,}5\,\mathrm{cm}$.

- Mit Hilfe der Braggschen Bedingung gilt: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ und $\frac{\Delta p_x}{p} = \sin\varphi$

- Mit Hilfe der Braggschen Bedingung gilt: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ und $\frac{\Delta p_x}{p} = \sin\varphi$
- Damit gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d}$ und damit $\Delta p_x \cdot d = \frac{\lambda}{2}$

Elektronenbeugung 2

- Mit Hilfe der Braggschen Bedingung gilt: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ und $\frac{\Delta p_x}{p} = \sin\varphi$
- Damit gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d}$ und damit $\Delta p_x \cdot d = \frac{\lambda}{2}$
- Da ja d wieder eine Begrenzung für die Ortsunschärfe Δx ist, gilt:

- Mit Hilfe der Braggschen Bedingung gilt: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ und $\frac{\Delta p_x}{p} = \sin\varphi$
- Damit gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d}$ und damit $\Delta p_x \cdot d = \frac{\lambda}{2}$
- Da ja d wieder eine Begrenzung für die Ortsunschärfe Δx ist, gilt:
- $\Delta x > \frac{h}{2 \cdot \Delta p_x}$

- Mit Hilfe der Braggschen Bedingung gilt: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ und $\frac{\Delta p_x}{p} = \sin\varphi$
- Damit gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d}$ und damit $\Delta p_x \cdot d = \frac{\lambda}{2}$
- Da ja d wieder eine Begrenzung für die Ortsunschärfe Δx ist, gilt:
- $\Delta x > \frac{h}{2 \cdot \Delta p_x}$
- Berechnung der Impulsunschärfe: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d} = 2{,}55 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{Ns}$

- Mit Hilfe der Braggschen Bedingung gilt: $\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ und $\frac{\Delta p_x}{p} = \sin\varphi$
- Damit gilt: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d}$ und damit $\Delta p_x \cdot d = \frac{\lambda}{2}$
- Da ja d wieder eine Begrenzung für die Ortsunschärfe Δx ist, gilt:
- $\Delta x > \frac{h}{2 \cdot \Delta p_x}$
- Berechnung der Impulsunschärfe: $\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2d} = 2{,}55 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{Ns}$
- In die Bedingung für die Ortsunschärfe eingesetzt ergibt sich: $\Delta x > 1{,}30 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

- Geht man von einer kontinuierlichen Verteilung aus, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = \frac{r_e^2 \cdot \pi}{A_{\text{Ring}}}$

Elektronenbeugung 3

- Geht man von einer kontinuierlichen Verteilung aus, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = \frac{r_e^2 \cdot \pi}{A_{\text{Ring}}}$
- Die Ringfläche wird bestimmtr durch:
  $A_{\text{Ring}} = \pi \left((R + \Delta x)^2 - (R - \Delta x)^2 \right)$
  $A_{\text{Ring}} = 4R\Delta x \cdot \pi = 1{,}87 \cdot 10^{-10}\,\text{m}^2$

Elektronenbeugung 3

- Geht man von einer kontinuierlichen Verteilung aus, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = \frac{r_e^2 \cdot \pi}{A_{\text{Ring}}}$
- Die Ringfläche wird bestimmtr durch:
  $A_{\text{Ring}} = \pi \left((R + \Delta x)^2 - (R - \Delta x)^2\right)$
  $A_{\text{Ring}} = 4R\Delta x \cdot \pi = 1{,}87 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2$
- Mit der Angabe über das Elektrons folgt: $r_e^2 \pi = 7{,}85 \cdot 10^{-27}$

- Geht man von einer kontinuierlichen Verteilung aus, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = \frac{r_e^2 \cdot \pi}{A_{\text{Ring}}}$
- Die Ringfläche wird bestimmtr durch:
  $A_{\text{Ring}} = \pi\left((R+\Delta x)^2 - (R-\Delta x)^2\right)$
  $A_{\text{Ring}} = 4R\Delta x \cdot \pi = 1{,}87 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^2$
- Mit der Angabe über das Elektrons folgt: $r_e^2\pi = 7{,}85 \cdot 10^{-27}$
- Damit ist die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = 4{,}20 \cdot 10^{-17}$

- Geht man von einer kontinuierlichen Verteilung aus, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = \frac{r_e^2 \cdot \pi}{A_{\text{Ring}}}$
- Die Ringfläche wird bestimmtr durch:
  $A_{\text{Ring}} = \pi \left((R + \Delta x)^2 - (R - \Delta x)^2\right)$
  $A_{\text{Ring}} = 4R\Delta x \cdot \pi = 1{,}87 \cdot 10^{-10}\,\text{m}^2$
- Mit der Angabe über das Elektrons folgt: $r_e^2 \pi = 7{,}85 \cdot 10^{-27}$
- Damit ist die Wahrscheinlichkeit: $P(e) = 4{,}20 \cdot 10^{-17}$
- Aufgrund der Ortsunschärfe ist ausgeschlossen, den Auftreffort eines Elektrons exakt zu bestimmen, da die Wahrscheinlichkeit an einem bestimmten Ort aufzutreffen verschwindend gering ist.