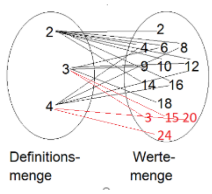
**Erwartungshorizont zum Übungsplan Mathematik**

## Aufgaben zur Relation und Funktionsbegriff

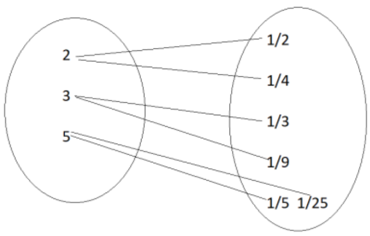
1. Aufgabe zur Relation
    a. Anhand des Mengendiagramms sieht man, dass den einzelnen Elementen aus der Definitionsmenge mehrere Elemente der Wertemenge zugeordnet werden. Daher ist die Zuordnung nicht eindeutig und somit keine Funktion.
    b. Einordnung der Zahlen: Man erkennt die folgenden Zusammenhänge: $3 = 3 \cdot 1$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 4 \cdot 5$ und $24 = 4 \cdot 6$. Damit kann man die 3 und die 15 der Zahl 3 und die Zahlen 20 und 24 der Zahl 4 zuordnen. Es ergibt sich dann das nebenstehend gezeichnete Mengendiagramm.




    c. Man erkennt, dass den einzelnen Zahlen der Definitionsmenge ihre ganzzahligen Vielfachen zugeordnet werden. Daher kann man die Terme wie folgt entwickeln:
    $x \longmapsto x \cdot n$ Dabei ist $n \epsilon \{1,2,3,4,5,6\}$
    Man kann die Relation in den drei verschiedenen Termen zuordnen:

$$2 \longmapsto 2n$$
$$3 \longmapsto 3n$$
$$4 \longmapsto 4n$$

    d. Um den Mathematischen Inhalt in Funktionen anstelle von einer Relation darzustellen, kann man jeder Zahl x ihr Zweifaches, in einer weiteren Zuordnung ihr Dreifaches und in der dritten Zuordnung ihr Vierfaches zuordnen. Da jede Zahl nur genau ein Zweifaches, Dreifaches bzw. Vierfaches besitzt, sind die drei genannten Zuordnungen eindeutig. Damit handelt es sich bei diesen drei Zuordnungen um drei Funktionen. Damit ist die Aussage richtig.
2. Relation
    a. Mengendiagramm der Zuordnung. Dazu betrachte die Bruchzahlen in der Wertemenge. Dabei fallen folgende Zusammenhänge auf:
    $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$ und $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$
    Damit ergibt sich das nebenstehend gezeichnete Mengendiagramm.



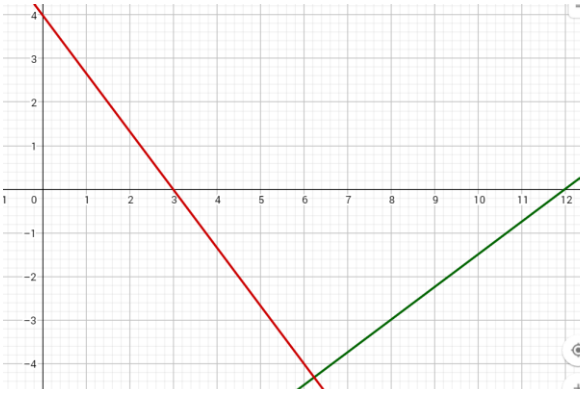

    b. Da den einzelnen Elementen aus der Definitionen mehrere Elemente aus der Wertemenge zugeordnet werden, handelt es sich um eine Relation und keine Funktion.
    c. Man erkennt, dass jeder Zahl zwei Brüche zugeordnet werden. Beim ersten Bruch ist der Nenner die Zahl selbst, beim zweiten Bruch handelt es sich immer um die Quadratzahl der Zahl, die den Nenner darstellt. Damit erhält man die folgende Relationsvorschrift:

$$x \longmapsto \left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right\}$$

3. Relationen in Umfragen
    a. Man erkennt aus der Tabelle, dass jeder Sportart mehrere Kinder, die an der Umfrage teilnahmen, zugeordnet werden. Daher ist diese Zuordnung nicht eindeutig und erfüllt damit nicht das Kriterium einer Funktion. Somit ist diese Zuordnung nur eine Relation.
    b. Bei der umgekehrten Zuordnung, d.h. jedem Teilnehmer werden die Sportarten zugeordnet, erkennt man aus der Tabelle, dass einem Umfrageteilnehmer mehrere Sportarten zugeordnet werden, beispielsweise dem Teilnehmer Florian die Sportarten Skifahren und Fußball. Damit diese Zuordnung eine Funktion darstellt, muss man die Umfrage so gestalten, dass jeder Teilnehmer nur eine Sportart nennen darf.

**Aufgaben zur linearen Funktion**

1. Lineare Funktionsuntersuchen mit zwei gegeben Termen
    a. Zeichnung des Graphen der beiden Funktionen im nebenstehenden Koordinatensystem.



    b. Berechnung der Nullstellen der Funktion

$$\frac{3}{4}x - 9 = 0$$
$$\frac{3}{4}x = 9$$
$$x = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12$$

Nullstelle der Funktion f: $x = 12$

$$-\frac{4}{3}x + 4 = 0$$
$$\frac{4}{3}x = 4$$
$$x = 3$$

Schnittpunkt der beiden Funktionen: Dazu werden die Funktionsterme beider Funktionen gleichgesetzt, was zu folgender Gleichung führt:

$$-\frac{4}{3}x + 4 = \frac{3}{4}x - 9$$
$$-\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}x = -13$$
$$-\frac{25}{12}x = -13$$
$$x = \frac{156}{25}$$

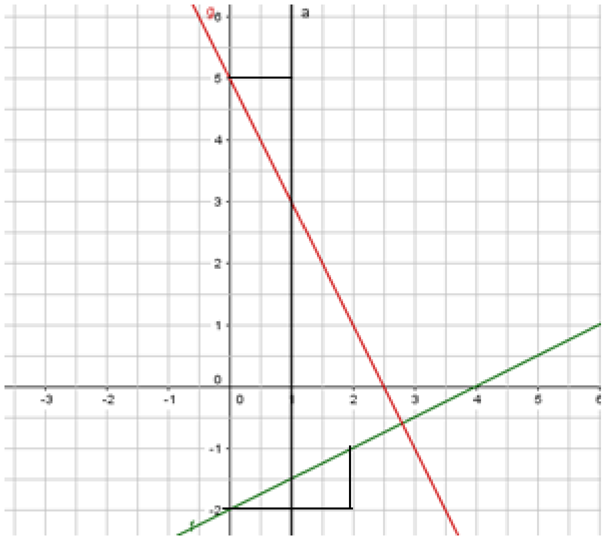
Einsetzen dieses x-Wertes in die Funktionsgleichung f liefert:

$$f\left(\frac{156}{25}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{156}{25} - 9 = 4{,}68$$

    c. Multipliziert man die Werte der beiden Steigungen miteinander, so ergibt sich der Wert -1. Aus diesem Grund weiß man, dass sich die beiden Geraden unter einem Winkel von 90° schneiden. Die Schnittpunkte mit der x-Achse der Funktionsgraphen und ihr Schnittpunkt bilden deshalb ein rechtwinkliges Dreieck. Dessen Flächeninhalt berechnet man wie folgt:

$$A = \frac{1}{2}gh$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(x_f - x_g\right) \cdot f(x_S)$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot (12 - 3) \cdot 4{,}68 = 21{,}06\ \mathrm{cm}^2$$

2. Lineare Funktionen deren Graphen durch eine Abbildung gegeben sind:




a. Man markiert jeweils den y- Achsenabschnitt der Geraden und zeichnet dann das Steigungsdreieck ein. Dabei stellt die horizontale Strecke des Steigungsdreiecks den Nenner und die vertikale Streckenlänge den Zähler dar.
Somit ergibt sich:
$$g(x) = -2x + 5$$
$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

b. Die schwarze Gerade stellt keinen Graphen einer linearen Funktion dar, weil es sich um eine vertikale Gerade handelt und so dem x-Wert 1 unendlich viele Punkte zugeordnet werden. Aus diesem Grund ist die Zuordnung nicht eindeutig und daher keine Funktion.

c. Schnittpunkt der beiden Funktionen:
$$-2x + 5 = \frac{1}{2}x - 2$$
$$-\frac{5}{2}x = -7$$
$$x = \frac{14}{5}$$
Den x-Wert in eine der beiden Funktionsgleichungen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen:
$$y = f\left(\frac{14}{5}\right) = -2 \cdot \frac{14}{5} + 5 = -\frac{3}{5}$$
Die Schnittpunkte mit der schwarzen Gerade berechnet man, in dem man den Wert 1 in die beiden Funktionsgleichungen einsetzt:
$$f(1) = -2 \cdot 1 + 5 = 3$$
$$g(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 = -\frac{3}{2}$$

d. Multipliziert man die Steigungen der beiden Funktionen f und g, dann erkennt man, dass sich als Wert dieses Produkts der Wert 1 ergibt. Daher schneiden sich die beiden Geraden in einem rechten Winkel und damit schließen der Schnittpunkt der beiden Graphen und die Schnittpunkte mit der dritten Gerade der beiden Graphen ein rechtwinkliges Dreieck ein. Dessen Fläche berechnet man durch:
$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{14}{5} - 1\right) \cdot \left(3 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = 4{,}05 \text{ FE}$$