Basis-Transformationsformel

Beispiel: Kann man $\log_4 16$ in der Form $\log_2 x$ schreiben?

Allgemeine Betrachtung:

Gegeben: $a^x = b$
Bestimme x!

Lösung:

1. Direkte Möglichkeit über die Definition des Logarithmus:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

2. Möglichkeit über die Anwendung von $\log_c$ auf beiden Seiten:

$$a^x = b \quad | \log_c$$
$$\log_c a^x = \log_c b$$

Anwendung der Potenzregel:

$$x \cdot \log_c a = \log_c b \quad | : \log_c a \neq 0$$
$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Da bei beiden Möglichkeiten die selbe Gleichung gelöst wurde folgt:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Basis-Transformation

Damit ergibt sich:

$$\log_4 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 16$$

Logarithmus-Gleichungen

Beispiel 1: Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

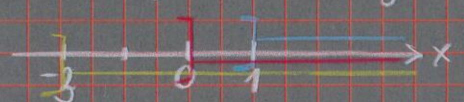
$$\log_4(x-1) - \log_4(x+3) = \log_4 x$$

1. Schritt – Bestimmung der Definitionsmenge

Die Argumente des Logarithmus müssen positiv sein:

$$\Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$$
$$x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Darstellung an der Zahlengerade



$$\mathbb{D} =]1; +\infty[$$

2. Schritt – Anwendung log-Gesetz

$$\log_4\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = \log_4 x$$

Wenn die Werte der Logarithmen übereinstimmen, dann bei gleicher Basis auch ihre Argumente.

3. Schritt: Argumente Gleichsetzen

$$\frac{x-1}{x+3} = x \quad | \cdot (x+3)$$
$$x - 1 = x(x+3)$$
$$x - 1 = x^2 + 3x \quad | -x+1$$
$$0 = x^2 + 2x + 1$$
$$0 = (x+1)^2 \quad | \sqrt{\ }$$
$$0 = x + 1 \Rightarrow x = -1$$

4. Vergleich mit $\mathbb{D}$ u. Angabe $\mathbb{L}$:

$$x \notin \mathbb{D} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$