4. Untersuchungen bei einer ganzrationalen Funktion

Beispiel: $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$

Ziel: Durch gezielte Berechnungen Aussagen zum Graphen zu treffen.

① **Nullstellen des Graphen**

$f(x) = 0$

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = 0 \quad | \cdot 3$

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$

a) gezieltes Raten der Nullstelle durch Einsetzen einer Zahl:
Für $x = 2$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} &2^3 + 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 - 16 = \\ &= 8 + 16 - 8 - 16 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = 2$$

b) Polynomdivision durch $x - x_1$:

$$\begin{aligned} &(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) : (x - 2) = x^2 + 6x + 8 \\ &\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ &\quad 6x^2 - 4x \\ &\quad \underline{-(6x^2 - 12x)} \\ &\qquad 8x - 16 \\ &\qquad \underline{8x - 16} \end{aligned}$$

c) Setze das Ergebnispolynom gleich 0 und löse die Gleichung:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= 0 \\ x^2 + 6x + 3^2 &= -8 + 3^2 \\ (x+3)^2 &= 1 \quad |\sqrt{\ } \\ x + 3 &= \pm 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = -4$ oder $x_2 = -2$

Nullstellen: $x_0 = 2$; $x_1 = -4$; $x_2 = -2$

Anwendung Nullstellensatz:

$f(x) = \frac{1}{3}\cdot(x+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Vorzeichentabelle d. Funktionswerte

	$-\infty < x <$ -4	-2	2	
$x+4$	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$x+2$	−	−	+	+
$f(x)$	−	+	−	+

$f(-3) = +\frac{5}{3}$ $\quad f(0) = -\frac{16}{3}$

Zeichnung des Funktionsgraphen