INFINTESIMALRECHNUNG

eine
Kurzzusammenfassung
von

StR Markus Baur
Werdenfels-Gymnasium

1 Differenzialrechnung

In dieser Kurzübersicht wird nochmals das wichtigste in einem Überblick dargestellt.

1 Die wichtigsten Ableitungsfunktionen auf einem Blick

Funktion	**Ableitungsfunktion**
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$	$f'(x) = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \ln(ax)$	$f'(x) = \frac{a}{x}$

2 Methoden der Differentialrechnung

Die Untersuchung auf lokale Extrema
Die Suche nach lokale Extrema zerfällt in drei Untersuchungsbereiche:

1. Bestimmung der Stelle mit waagrechter Tangente (Stellen beziehen sich immer auf x-Werte):
   - Bilde die erste Ableitung $f'(x)$.
   - Setze $f'(x) = 0$ und löse die entstehende Gleichung nach x auf.
   - Dies liefert die Stellen $x_1, x_2, ..., x_n$ mit waagrechter Tangente.
2. Die Bestimmung der Art des lokalen Extremas:
   - Bilde die zweite Ableitung $f''(x)$.
   - Berechne durch Einsetzen $f''(x_1), f''(x_2), ..., f''(x_n)$ Ist $f''(x_1) > 0$, dann handelt es sich um ein lokales Minumum bei x_1. Ist $f''(x_1) < 0$, dann handelt es sich um ein lokales Maximum bei x_1.

   Dazu gibt es Alternative die Vorzeichenuntersuchung der ersten Ableitung:
   - Faktorisiere f'(x).
   - Unterteile durch x_1,...,x_n den Definitionsbereich in n Intervalle.
   - Untersuche das Vorzeichen der ersten Ableitung in jedem Intervall.

3. Berechnung der y-Koordinate der lokalen Extrema:
   - Dies geschieht durch Einsetzen in die Funktion, also durch die Berechnung von $f(x_1), ..., f(x_n)$.

Die Bestimmung der Wendepunkte :

1. Bilde die zweite Ableitung $f''(x)$.
2. Setze $f''(x) = 0$. Die so entstandene Gleichung liefert die Lösungen x_1,...,x_n.
3. Prüfe, dass $f'''(x_1) \neq 0, ..., f'''(x_n) \neq 0$
4. Die y- Koordinate der Wendepunkte wird berechnet durch: $f(x_1), ...f(x_n)$

2 Integralrechnung

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Ergebnisse der Infinitesimalrechnung zusammengestellt:

1 Die wichtigsten Stammfunktionen

Funktion	**Stammfunktion**
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + C$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + C$
$f(x) = \sin(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\sin(ax) + C$
$f(x) = \cos(ax)$	$F(x) = \frac{1}{a}\cos(ax) + C$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x + C$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x\ln(x) - x$

2 Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung lautet in Wortform:

Genau dann ist $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, wenn

$$F'(x) = f(x)$$

gilt.

Um zu zeigen, dass eine Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$ ist, geht man wie folgt vor:

1. Bilde $F'(x)$
2. Fasse den Term soweit wie möglich zusammen.
3. Vergleiche das Ergebnis der Ableitung mit der Funktion $f(x)$. Stimmt das Ergebnis der Ableitung mit $f(x)$ überein, dann ist die Behauptung wahr, andernfalls eben nicht.

3 Der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgrafen

Um den Flächeninhalt der Fläche zu berechnen, der durch die Funktionsgrafen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ begrenzt wird, geht man wie folgt vor:

1. Berechne die Schnittstellen der Funktionen $f(x)$ mit $g(x)$ durch Lösung der Gleichung
$$f(x) = g(x)$$
Diese Gleichung liefert als Lösung die Schnittstellen x_1 und x_2.
2. Der Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen wird dann berechnet durch:
$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right|$$

4 Besondere Integrale

Hat eine Integrantenfunktion die Form
$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
dann gilt:
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$
Beispiel:
$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \ln\left|x^2-1\right| + C$$
Hat eine Funktion die Form:
$$g(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$$
dann gilt
$$\int f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{f(x)} + C$$
Beispiel:
$$\int 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^3} + C$$

5 Uneigentliche Integrale

Unter uneigentlichen Integrale versteht man Integrale, die einseitig unbegrenzt sind, also

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Um diese Intgerale berechnen zu können, geht man in den folgenden Schritten vor:

1. Setze eine feste obere Grenze b ein und führe einen Grenzwertprozess aus:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\mathrm{d}x$$

2. Werte das Integral durch eine Stammfunktion mit dem Parameter b aus.
3. Führe für den nun entstandenen Term den Grenzwertprozess $b \to \infty$ durch.