## 9. Lösungen zu den Übungsaufgaben

1 - Wachstum einer Pflanze

a) Exponentielle Beschreibung

$f(x) = 1{,}0\,cm \cdot 2^{\frac{x}{3d}}$

Für die langfristige Beschreibung ist die Funktion ungeeignet, da es sich für $x \to \infty$ bei $f(x)$ um eine divergente Funktion handelt. Die Pflanze hat aber ab einem bestimmten Zeitpunkt $x_0$ ein stagnierendes Wachstumsverhalten, was durch die gebene Funktion $f(x)$ nicht modelliert werden kann.

b) Entwicklung der Funktionsgleichung:

$f(x) = b\,(1 - a^x)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 50\,cm$. Da aber andererseits gilt:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} b\,(1 - \underbrace{a^x}_{\to 0}) = b$

$\Rightarrow b = 50\,cm$

Bestimmung des Parameters $a$: $P(3 \mid 2\,cm)$ ist ein Punkt des Funktionsgraphen:

$2\,cm = 50\,cm\,(1 - a^3)$

$\frac{2\,cm}{50\,cm} = 1 - a^3$

$\frac{1}{25} = 1 - a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{24}{25} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{24}{25}} = \left(\frac{24}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$

Damit lautet die Funktionsgleichung

$f(x) = 50\,cm \cdot \left(1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{\frac{x}{3}}\right)$

2- Kaulquappen im Teich

a) Aufstellen einer Wachstumsfunktion

Vorgaben aus der Aufgabenstellung

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 300$

Wachstumsrate: 0,15%

Nach 4 Tagen: 12 Kaulquappen

Berechnung der Anzahl der Kaulquappen zum Beobachtungsbeginn:

$N(x) = N_0 \cdot (1+0,15)^x$

$12 = N_0 \cdot (1,15)^4$

$\Rightarrow N_0 = \frac{12}{1,15^4} = 6,86 = 7$

Allgemeine Struktur des Wachstumsgesetzes

$f(x) = (300 - N_0) \cdot (1 - a^x) + N_0 \quad N_0 = 7$

$\Rightarrow f(x) = 293 \cdot (1 - a^x) + 7$

$f(4) = 12$

$\Rightarrow 12 = 293 \cdot (1 - a^4) + 7$

$5 = 293 \cdot (1 - a^4)$

$\frac{5}{293} = 1 - a^4 \Rightarrow a^4 = 1 - \frac{5}{293} \Rightarrow a^4 = \frac{288}{293}$

$\Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{288}{293}} = 0,996$

Somit lautet die Funktion zur Beschreibung des Wachstums:

$f(x) = 293 \cdot (1 - 0,996^x) + 7$

Mathematik    Eigenschaften von Funktionen    10. Klasse

## 3- Grenzwerte von Funktionen

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \overbrace{\frac{2}{(x-3)^2}}^{\to 0} + 1 \right) = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \overbrace{\frac{5}{2^x + 3}}^{\to 0} \right) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-5}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = 0$

alle Brüche konvergieren gegen 0

d) $\lim\limits_{x \to \infty} 320 \cdot \left(2 - \overbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^x}^{\to 0}\right) = 320 \cdot 2 = 640$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{\underbrace{\frac{2}{4^x}}_{\to 0} + 27} = \sqrt[3]{27} = 3$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{x}{3^x} - \overbrace{4x}^{\to \infty} \right) = -\infty$

↳ 0, da $3^x$ stärker divergiert als $x$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \underbrace{\frac{2}{x^3}}_{\to 0} + 8 \right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left( \frac{2}{\underbrace{\sqrt{x} - 4}_{\to \infty}} \right) = 0$

## 5- Bestimmung einer Funktion mit vorgegebenen Grenzwerten

$f(x) = -x^2 + 5$

## 6- Exponentialfunktion mit gegebenen Eigenschaften:

$f(x) = 2^{2x} - 2$

Aufgabe 7 - gebrochen-rationale Funktion

$f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x^2-8x+6}$

a) Nullstellen und Definitionsmenge

$2x^2-8x+6=0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2} \Rightarrow x_1 = 3$ oder $x_2 = 1$

folglich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{1;3\}$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$

$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow (x_1=3)$ oder $x_2 = 2$

Nullstelle für $x_2 = 2$

b) Verhalten der Funktion an den äußeren Rändern

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+6}{2x^2-8x+6} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}{x^2\cdot(2-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2})}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}+\overbrace{\frac{6}{x^2}}^{\to 0}}{2-\underbrace{\frac{8}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{6}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{1}{2}$

graphische Bedeutung:

Der Funktionsgraph besitzt die waagrechte Asymptote

$y = \frac{1}{2}$