

## Gesetze der Ganze Zahlen

### Grundwissen Mathematik

von

Markus Baur, StR

Werdenfels-Gymnasium

Das Dokument steht unter einer Creative Commons Lizenz:

Das Werk darf unter den folgenden Bedingungen weiterbearbeitet und weiter veröffentlicht werden:

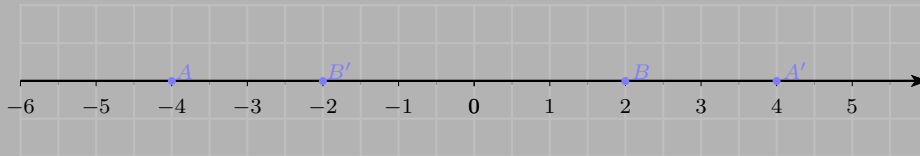
1. Namensnennung
2. Nicht-kommerzielle Verwendung
3. Weitergabe unter den gleichen Bedingungen



## Das Spiegelzahlkonzept

### Negative Zahlen

Man erweitert den Zahlenstrahl zur Zahlengerade, indem man den Zahlenstrahl am Nullpunkt spiegelt:



Generell ist in diesem Modell die negative Zahl die Spiegelzahl von der positiven Zahl, also gilt:

$$-2 \text{ ist Spiegelzahl von } 2$$

Allgemein gilt:

$$\text{Spiegelzahl} = -\text{Originalzahl}$$

Will man nun die Spiegelzahl von  $-4$  bestimmen, dann ist die Spiegelzahl  $4$ . Verwendet man zur Bildung das obenstehende Gesetz, dann gilt:

$$-(-4) = 4$$

Damit ergibt sich eine Regel:

Die Spiegelzahl einer negativen Zahl ist eine positive Zahl

Unter dem **Betrag einer Zahl** versteht man immer den **Abstand der Zahl zum Nullpunkt der Zahlengerade**. Da der Abstand immer eine positive Zahl ist, ist der Betrag stets positiv, es gilt also:

$$|-3| = 3 \text{ und } |3| = 3$$

### Anwendung des Spiegelzahlkonzepts

- Bestimme die Spiegelzahl von den folgenden Zahlen:  $15$ ,  $-19$  und  $-69$ .

$$\text{Spiegelzahl von } 15 = -15$$

$$\text{Spiegelzahl von } -19 = -(-19) = 19$$

$$\text{Spiegelzahl von } -69 = -(-69) = 69$$

- Bestimme den Betrag von den folgenden Zahlen:  $-145$ ,  $56$  und  $-296$ :

$$|-145| = 145 \quad |56| = 56 \quad |-296| = 296$$

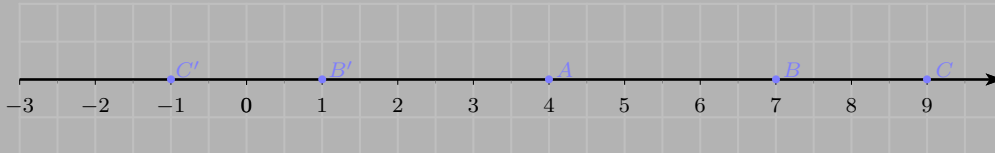
# 1 Addition von ganzen Zahlen

## Addition einer positiven und negativen Zahl

Betrachten wir zwei Beispiele:

$$4 + (-3) = ?$$

$$4 + (-5) = ?$$



Das Addieren einer Spiegelzahl zu einer zweiten Zahl bedeutet das Spiegeln der Zahl an der zweiten Zahl. Damit erhalten wir im ersten Fall

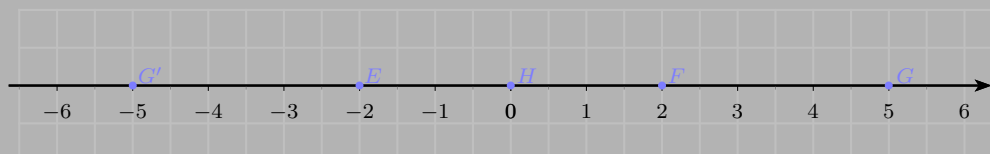
$$4 + (-3) = 1 = 4 - 3$$

$$4 + (-5) = -1 = 4 - 5$$

Das Addieren einer Spiegelzahl zu einer zweiten Zahl ist gleichbedeutend mit der Subtraktion der Zahl von der zweiten Zahl. Ist der Subtrahend größer als der Minuend, dann ist das Ergebnis negativ, im anderen Fall ist es positiv.

## Addition zweier negativen Zahlen

$$(-2) + (-3) = ?$$



Das Ergebnis ist auf der Zahlengerade  $-5$ . Daraus lässt sich die folgende Regel erklären:

Das Addieren zweier negativen Zahlen ist die Spiegelzahl der Summe der gleichen positiven Zahlen.

Damit fehlt noch der letzte Fall, das Addieren einer positiven Zahl zu einer negativen Zahl

## Addition einer negativen und positiven Zahl

Dazu betrachten wir das folgende Beispiel:

$$-3 + 2 = -1$$

$$3 - 2 = 3 + (-2) = 1$$

Man erkennt an diesem Beispiel: Das Ergebnis einer positiven Zahl zu einer negativen Zahl ist die Spiegelzahl von der Addition einer negativen Zahl zu einer positiven Zahl. Damit gilt in diesem Fall folgender Regel:

Die Addition einer positiven Zahl zu einer negativen Zahl ist gleichbedeutend mit der Differenz der positiven Zahl mit der negativen Zahl. Ist der Minuend größer als der Subtrahend, dann ist das Ergebnis positiv, anderenfalls ist es negativ

## Rechenregeln

$$+(-) = -$$

$$-(+) = -$$

$$-(-) = +$$

$$+(+) = +$$

## Anwendung der Additionsgesetze

1. Berechne

$$-34 + 29 =$$

$$-34 + 29 = 29 - 34 = -(34 - 29) = -5$$

2. Berechne

$$-56 + (-67)$$

$$-56 + (-67) = -(56 + 67) = -123$$

3. Berechne

$$-34 + 71$$

$$-34 + 71 = -(34 + (-71)) = -(34 - 71) = -(-(71 - 34)) = -(-37) = 37$$

4. Berechne

$$21 - |-67 + 31|$$

$$21 - |-67 + 31| = 21 - |-(31 + (-67))| = 21 - |-( -(67 - 31))| = 21 - |-36| = 21 - 36 = -(36 - 21) =$$

## Multiplikation und Verbindung mit der Addition

### Multiplikation ganzer Zahlen

$$5 \cdot 3 = 15$$

$$-5 \cdot 3 = -15$$

$$5 \cdot (-3) = -15$$

$$(-5) \cdot (-3) = 15$$

Aus diesen Beispielen lässt sich die folgende Regel ableiten:

Werden zwei positive oder zwei negative Zahlen miteinander multipliziert, dann ist das Ergebnis eine positive Zahl. In allen anderen Fällen ist das Ergebnis der Multiplikation eine negative Zahl.

### Verbindung der Multiplikation mit der Addition

$$(-8) \cdot 7 + (-15) \cdot (-3) = ?$$

$$(-8) \cdot 7 + (-15) \cdot (-3) = -56 + 45 = -(56 - 45) = -11$$

Man muss bei Termen, die eine Verbindung von Addition und Multiplikation sind, immer erst die Produkte berechnen und anschließend die Summe bilden (Punkt-vor-Strich-Regel)

Damit hat man eine Regel für die Verbindung der Rechenarten gefunden.

### Anwendung der Regeln

1. Berechne das folgende Produkt:  $-45 \cdot 12$

$$-45 \cdot 12 = -(45 \cdot 12) = -540$$

2. Berechne den Wert des folgenden Terms:

$$-34 \cdot [-21 \cdot 3 + (-3) \cdot (-20)] =$$

$$-34 \cdot [-21 \cdot 3 + (-3) \cdot (-20)] = -34 \cdot [-63 + 60] = -34 \cdot (-3) = 102$$