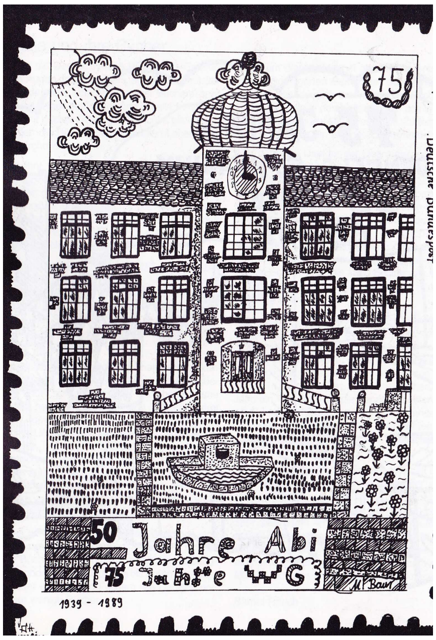


Repetitorium der analytischen Geometrie

Eine Zusammenfassung der analytischen Geometrie an bayerischen Gymnasien

von

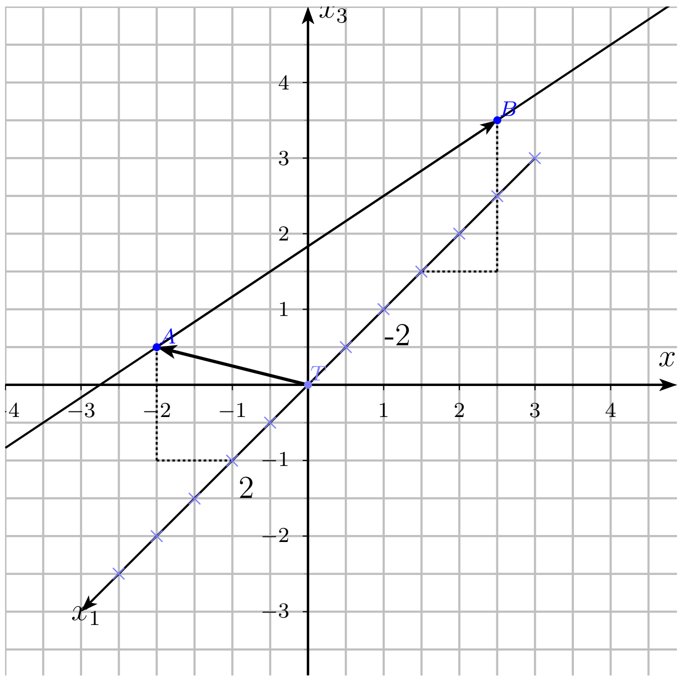
Markus Baur, StR
Werdenfels-Gymnasium

1 Geraden und Ebenen im Raum

Ziel dieses Abschnittes ist es, dass man mit Hilfe von Vektoren Geraden und Ebnen im Raum eindeutig mit algebraischen Mitteln beschreiben kann.

1 Geraden im Raum

Wir betrachten das folgende Beispiel:



Um die gegebene Gerade beschreiben zu können stellen wir uns folgendes vor:

- Wir starten im Ursprung.
- Wir bewegen uns von dort zum Punkt A.
- Von dort bewegen wir uns dann zum Punkt B.
- Jeden weiteren Punkt erreichen wir von A aus, wenn wir einen Bruchteil, bzw. ein Vielfaches von dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ laufen.

Diese Wege kann man mit Hilfe der Vektoraddition veranschaulichen:

- Im Koordinatensystem hat der Punkt A die Koordinaten $A(2|-1|1{,}5)$ und der Punkt B die Koordinaten $B(-3|1|2)$.
- Vom Ursprung aus gelangt man über den Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ zum Punkt A.

- Um zum Punkt B zu gelangen, wird zu diesem Vektor der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hinzuaddiert.

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB}$$

- Um vom Punkt A der Gerade zu einem beliebigen Punkt X der Gerade zu gelangen, muss man entweder ein Vielfaches oder einen Teil von $\overrightarrow{AB}$ zum Vektor $\overrightarrow{A}$ addieren.

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{AB}$$

  Mit dieser Gleichung kann jeder beliebige Ortsvektor eines Punktes X beschrieben werden, der sich auf der Geraden befindet. Damit haben wir eine Vektorgleichung gefunden, mit deren Hilfe man nun in der Lage ist, jeden Punkt der Gerade g zu berechnen. Konkret hat diese Vektorgleichung in unserem Fall das folgende Aussehen:

$$g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Eine Gerade g, die durch die Punkte A und B verläuft wird durch die Vektorgleichung

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{AB}$$

beschrieben. $\overrightarrow{A}$ wird dabei als **Aufpunktsvektor** bezeichnet, $\overrightarrow{AB}$ wird dabei als **Richtungsvektor** bezeichnet.

Die Vorgaben bei der Angabe führen zu unterschiedlichen Formen der Geradengleichung:

- Werden zwei Punkte der Geradengleichung vorgegeben, so wie dies im Eingangsbeispiel gegeben ist. führt dies zur Zweipunkteform der Geradengleichung:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda\left(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}\right)$$

- Werden bei der Vorgabe der Aufpunktsvektor und der Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$ angegeben, dann ist die Geradengleichung in der Punkt-Richtungsvektor-Form gegeben:

$$g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{u}$$

- Beide Formen der Geradengleichung enthalten den Parameter λ. Daher handelt es sich bei den beiden angesprochenen Formen der Geradengleichungen um eine **Parameterform der Geradengleichung**.

2 Lagebeziehungen von zwei Geraden im Raum

Im dreidimensionalen Raum können zwei Geraden in folgenden Lagebeziehungen zueinander stehen:

- Die beiden Geraden sind echt parallel oder identisch.
- Die beiden Geraden schneiden sich.
- Die beiden Geraden sind zueinander windschief.

Die rechnerische Überprüfung der Lagebeziehung von zwei Geraden läuft in folgenden Schritten ab:

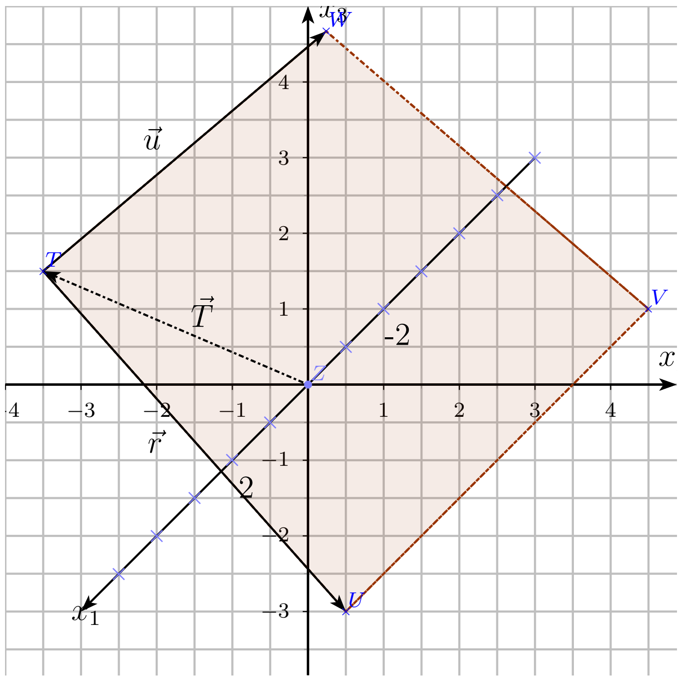
- Prüfe ob die beiden Richtungsvektoren linear abhängig sind. Prüfe dazu, ob der Richtungsvektor ein Vielfaches vom Richtungsvektor der zweiten Gerade ist. Ist dies der Fall, dann sind die beiden Geraden identisch oder echt parallel.
- Prüfe ob der Aufpunkt der ersten Gerade ein Punkt auf der zweiten Gerade ist. Ist dies der Fall, dann sind sie identisch, andernfalls echt parallel.

Die Richtungsvektoren sind lineare unabhängig.

- Setze die Terme der beiden Geraden gleich. Dadurch entsteht ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten und drei Gleichungen. (Überbestimmtes Gleichungssystem).
- Lasse eine Gleichung zunächst weg und löse das Gleichungssystem nach den beiden Unbekannten auf.
- Setze beide Lösungen in die weggelassene Gleichung ein. Ergibt sich eine wahre Aussage, dann schneiden sich die beiden Geraden, andernfalls sind sie windschief.

3 Beschreibung von Ebenen im Raum

Wir betrrachten die folgende Abbildung im dreidimensionalen Raum:



Um die Ebene beschreiben zu können betrachtet man die Situation vom Ursprung des Koordinatensystems aus:

- Zunächst gelangt man durch den Vektor $\vec{T}$ zum Punkt T. Daher wird dieser Vektor wie bei der Gerade als Aufpunktsvektor bezeichnet.
- Die Ebene wird dann durch die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{r}$ aufgespannt.
- Daher kann man die Ebene E durch die folgende Vektorgleichung beschreiben:

$$E : \overrightarrow{X} = \overrightarrow{T} + \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{r}$$

Da diese Gleichung die Parameter λ und μ enthält, nennt man diese Form auch Parameterform der Ebene.

Die Ebene ist aber auch noch in weiteren Formen beschreibbar. Zusammenfassend kann man sagen: Die Ebene kann entweder in der Parameterform angegeben werden:

$$E : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

angegeben werden. Dabei ist $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Aufpunktsvektor, $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Richtungsvektoren der Ebene. **Die beiden Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein** .
Eine andere Möglichkeit die Ebene anzugeben ist die Angabe in der **Koordinatenform**

$$\boxed{E:\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + d = 0}$$

Um die Parameterform in die Koordinatenform zu bringen, geht man folgendermaßen vor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Bilde den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Diesen Vektor kann man noch durch -6 dividieren, so dass der Normalenvektor entsteht:
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor und einem beliebigen Vektor aus der Ebene muss Null sein, da der Normalenvektor auf E senkrecht steht. Damit gilt insgesamt die Bedingung:
$$\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$$
Durch Ausrechnen erhält man dann die Koordinatenform
$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

4 Schnittgerade von zwei Ebenen

Um die Schnittgerade von zwei Ebenen zu ermitteln, geht man am besten so vor:

- Bringe mit dem eben genannten Verfahren eine Ebenengleichung in die Koordinatenform.
- Setze für x_1, x_2 und x_3 jeweils die x_1- Zeile, x_2- Zeile, bzw x_3- Zeile der Parameterform der anderen Ebene ein. Dadurch ergibt sich eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Löse diese nach einer Unbekannten auf.

- Setze in die Parameterform der zweiten Ebene den eben berechneten Term anstelle der Unbekannten ein, nach der du die Gleichung im vorigen Schritt aufgelöst hast.
- Dadurch erhältst du die Gleichung der Schnittgerade.

Die Hesse- Normalform

Die Hesse- Normalform hat eine sehr praktische Bedeutung, denn mit Hilfe des sogenannten Hesse- Terms ist man in der Lage auf sehr unkomplizierte Art und Weise Abstände zu entwickeln. Dieses Konzept wird in den folgenden Abschnitten eingehend besprochen.

5 Normaleneinheitsvektor

Wir betrachten eine Koordinatenform einer Ebene:

$$E : -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4 = 0$$

Aus dieser Form ist sofort der Normalenvektor dieser Ebene ablesbar:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Vektorbetrags kann man nun die Länge des Vektors bestimmen:

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Unter dem Normaleneinheitsvektor versteht man den Vektor, der auf der Ebene senkrecht steht und die Länge 1 besitzt. Da der Normalenvektor bereits senkrecht auf der Ebene steht, muss man ihn nur noch durch seine Länge 3 dividieren, um den Normaleneinheitsvektor herzustellen:

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Allgemein kann man die folgende Definition fassen:

Unter dem Normaleneinheitsvektor versteht man einen Normalenvektor mit der Länge 1. Diesen erzeugt man aus einem Normalenvektor, indem man diesen durch seinen Vektorbetrag dividiert:

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

6 Die Hesse- Normalen- Form der Ebenengleichung

Wir betrachten nochmals die oben genannte Ebene E:

$$E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4 = 0$$

Diese Ebene wird erzeugt durch die Skalarporduktform:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Allgemein ist uns das Bildungsgesetz für die Koordinatenform der Ebene gegeben durch

$$\overrightarrow{n} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} \right)$$

Die Hesse' sche Normalenform entsteht dadurch, dass man anstelle des Normalenvektors den Normaleneinheitsvektor in dem obengenannten Erzeugungsgesetz der Koordinatenform der Ebene verwendet:

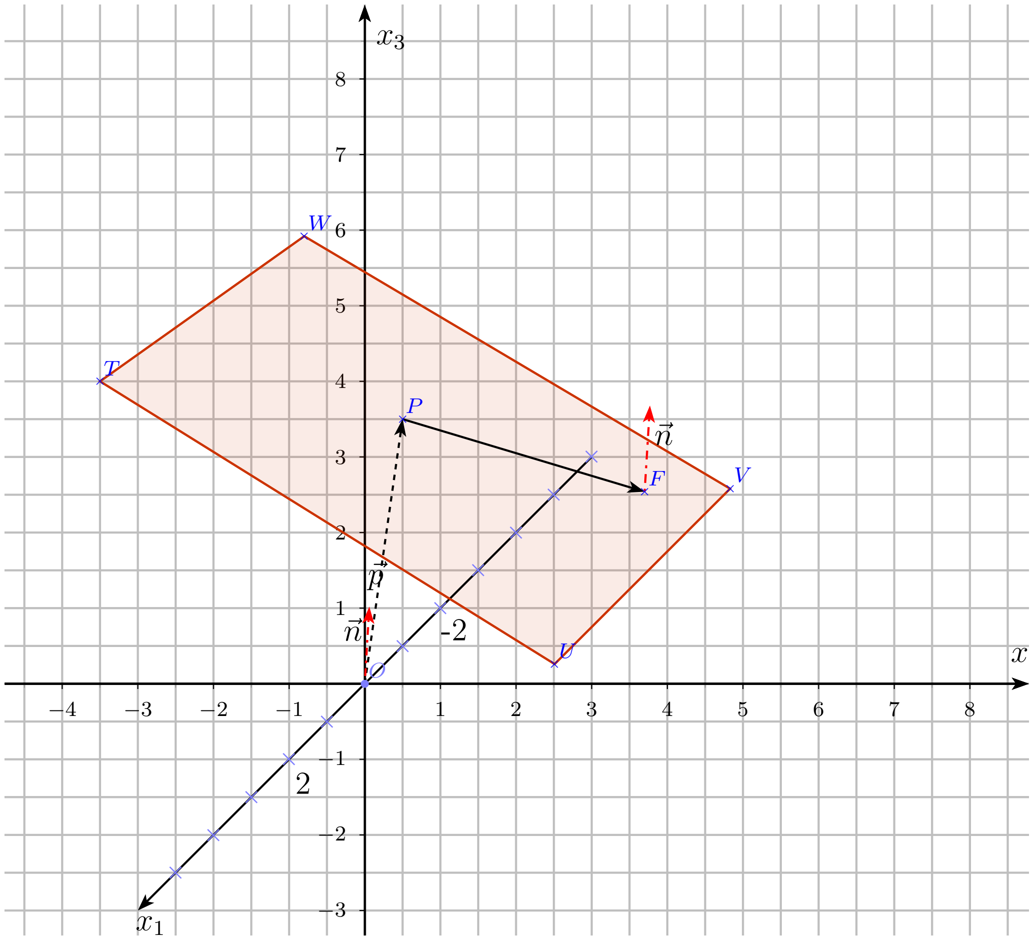
Die Hessenormalenform wird erzeugt durch die Forderung:

$$\overrightarrow{n_0} \circ \left(\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} \right)$$

Dabei wird die linke Seite dieser Gleichung als **Hesse-Term** bezeichnet.

7 Die richtige Orientierung

Wenn die Ebene E den Ursprung nicht enthält, dann ist es notwendig, dass der Normaleneinheitsvektor zur Ebene hin orientiert ist. Dies soll die folgende Zeichnung erklären:



In dieser Zeichnung sieht man, dass der Normaleneinheitsvektor zur Ebene hinzeigt, wenn der Repräsentant des Normaleneinheitsvektors mit dem Ursprung als Aufpunkt betrachtet wird. Nun wird ein Repräsentant dieses Normaleneinheitsvektors betrachtet, der als Aufpunkt den Aufpunkt der Ebene besitzt. Dieser schließt nun mit dem Aufpunktsvektor (rot in der Zeichnung dargestellt) einen Winkel ein, der größer als 90° ist. Dies bedeutet aber für das Skalarprodukt des Normaleneinheitsbektors mit dem Aufpunktsvektor einen positiven Wert annehmen muss. Das führt zu der Forderung:

$$\vec{n_0} \circ \overrightarrow{A} > 0$$

Dies wird bei unserer Ebene erfüllt, wie man durch Berechnung des Sklarprodukts leicht nachvollziehen kann.

8 Abstand eines Punktes zur Ebene, der nicht in der Ebene liegt

Betrachtet man nun die Hesse- Normalenform, bei der die Forderung

$$\vec{n_0} \circ \overrightarrow{A} > 0$$

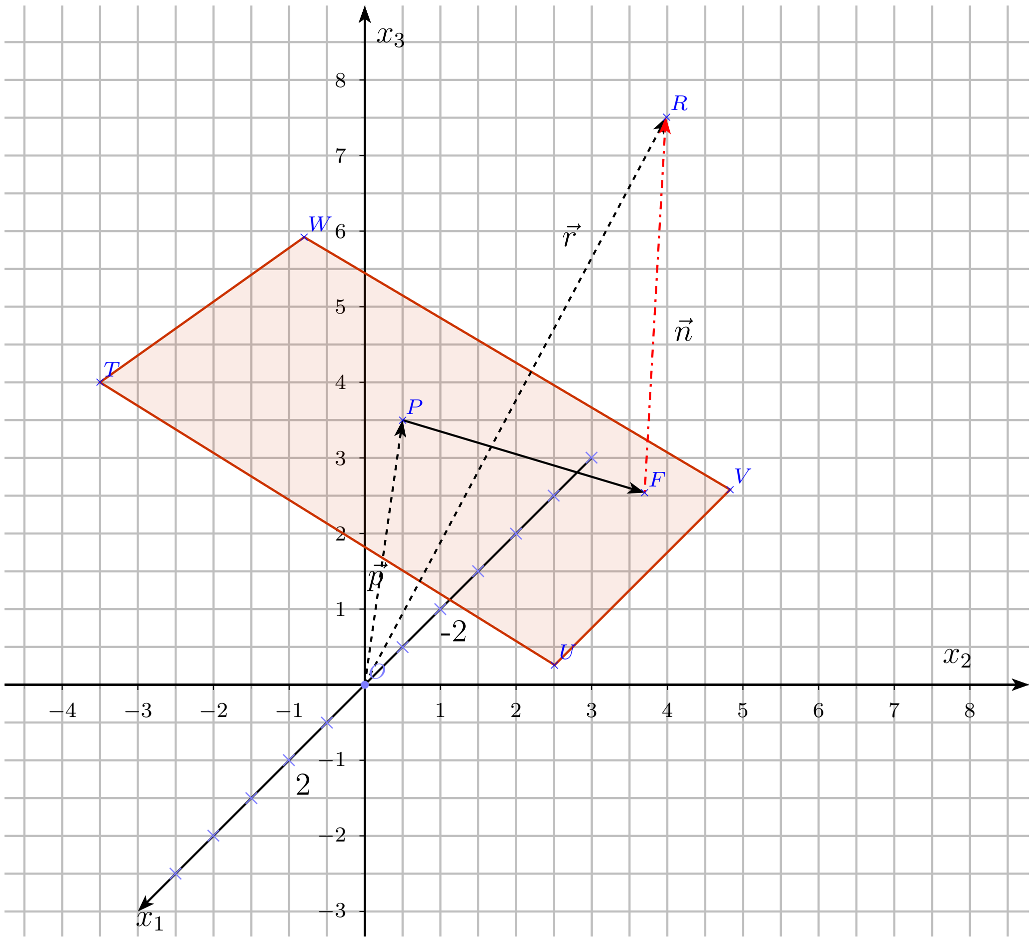
erfüllt ist, dann kann man den Betrag des Abstands dadurch berechnen, dass man den Ortsvektor $\overrightarrow{P}$ anstelle von $\overrightarrow{X}$ in den Hesseterm einsetzt. Der Termwert ist dann geometrisch als der Abstand des Punktes P von der Ebene zu deuten:

Berechnung des Abstands des Punktes P zur Ebene E durch:

$$d_P = \overrightarrow{n_0} \circ \left(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{A}\right)$$

9 Die formale Herleitung

Wir betrachten den folgenden allgemeinen Fall in der nachstehend gedruckten Abbildung:



In der Zeichnung wird die Ebene E durch das orange Rechteck $TUVW$ dargestellt. Dabei sind P und F Punkte dieser Ebene und ferner steht $\overrightarrow{FR}$ senkrecht auf der Ebene, ist also ein Normalenvektor dieser Ebene. Dieser Vektor lässt sich über die Ortsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{p}$ wie nachstehend erklärt wird ausdrücken:

$$\overrightarrow{FR} = \overrightarrow{r} - \left(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{PF}\right) = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{p} - \overrightarrow{PF}$$

Hinsichtlich der Vektorbetrag und dem Skalarprodukt eines Vektors gilt der Zusammenhang:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \circ \vec{a}$$

Wendet man nun dieses Gesetz auf den Vektor $\overrightarrow{FR}$ an, dann erhält man:

$$\left|\overrightarrow{FR}\right| = \overrightarrow{FR} \circ \overrightarrow{FR}$$

Dabei können wir wegen den oben stehenden Überlegungen die folgende Ersetzung durchführen:

$$\left|\overrightarrow{FR}\right|^2 = \left(\vec{r} - \vec{p} - \overrightarrow{PF}\right) \circ \overrightarrow{FR}$$

Wertet man das Skalarprodukt mit Hilfe des Distributivgesetzes aus, dann ergibt sich:

$$\left|\overrightarrow{FR}\right|^2 = \vec{r} \circ \overrightarrow{FR} - \vec{p} \circ \overrightarrow{FR} - \overrightarrow{PF} \circ \overrightarrow{FR}$$

Es muss noch berücksichtigt werden, dass $\overrightarrow{FR} \circ \overrightarrow{PF} = 0$:

$$\left|\overrightarrow{FR}\right|^2 = \vec{r} \circ \overrightarrow{FR} - \vec{p} \circ \overrightarrow{FR}$$

$$\left|\overrightarrow{FR}\right|^2 = (\vec{r} - \vec{p}) \circ \overrightarrow{FR}$$

Setzt man noch $|\overrightarrow{FR}|^2 = |\overrightarrow{FR}| \cdot |\overrightarrow{FR}|$, dann erhält man insgesamt:

$$|\overrightarrow{FR}| = (\vec{r} - \vec{p}) \circ \frac{\overrightarrow{FR}}{\left|\overrightarrow{FR}\right|}$$

Diese letzte Gleichung ist nun folgendermaßen zu interpretieren:

- $\left|\overrightarrow{FR}\right|$ ist der Abstand des Punkts R von der Ebene.
- $\frac{\overrightarrow{FR}}{|\overrightarrow{FR}|}$ entspricht dem Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$.

Mit dieser Deutung kommt man dann zu dem folgenden Ergebnis:

$$d(R;E) = (\vec{r} - \vec{p}) \circ \overrightarrow{n_0}$$

Die rechte Seite entspricht nun genau dem Hesse- Term, in welchen nun für $\vec{X}$ der Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes R eingesetzt wird, von dem man den Abstand zur Ebene wissen möchte. Als Fazit kann man nun ziehen:

Den Abstand eines Punktes von der Ebene berechnet man, indem man seinen Ortsvektor in den Hesseterm einsetzt:

$$d(R;E) = (\vec{r} - \vec{p}) \circ \overrightarrow{n_0}$$