

Das lineare Gleichungssystem

Freitag, 8. Dezember 2017 12:04

Einführendes Beispiel

Bestimme den Schnittpunkt der beiden linearen Funktionen

$f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ rechnerisch und graphisch.

Algebraisch gesehen sind hier zwei Gleichungen miteinander verknüpft, nämlich

$$y = \frac{1}{4}x + 3 \quad (1) \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}x + 2$$

Im Gegensatz zum letzten Jahr besitzen diese Gleichungen mehrere Unbekannte, wobei die Gleichungen aufgrund der Und-Verknüpfung gleichzeitig zu erfüllen sind.

Definition:

Unter einem linearen Gleichungssystem versteht man die Und-Verknüpfung von mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Beispiel:

$$y = \frac{1}{4}x - 3 \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad (2)$$

Lösungsmethode eines linearen Gleichungssystems
durch Gleichsetzen - Gleichsetzungsverfahren

Man setzt die Terme der rechten Seite jeweils gleich:

$$\frac{1}{4}x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2 \quad | + 3$$

$$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{2}x + 5 \quad | + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{3}{4}x = 5 \quad | : \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{20}{3}$$

Dieses Ergebnis setzt man in eine der beiden Gleichungen ein:

$$y = -\frac{10}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{20}{3} \mid -\frac{4}{3} \right) \right\}$$

Zweites Beispiel:

Löse folgendes Gleichungssystem:

$$2x - 4y = 6 \quad (1)$$

$$3x + 3y = 9 \quad (2)$$

Löse beide Gleichungen nach y auf:

$$-4y = -2x + 6 \quad (1)$$

$$+3y = -3x + 9 \quad (2)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$y = -x + 3 \quad (2)$$

Terme auf der rechten Seite gleichsetzen:

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = -x + 3 \quad | + x$$

$$\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 3 \quad | + \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{9}{2} \quad | : \frac{3}{2}$$

$$x = 3$$

Setze das Ergebnis in die zweite Gleichung ein:

$$y = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(3|0)\}$$

Merksatz:

Das Gleichsetzungsverfahren besteht aus folgenden Schritten:

- Beide Gleichungen werden nach eine Variablen aufgelöst.
- Die für diese Variable erhaltenen Terme werden gleichgesetzt und nach der Unbekannten aufgelöst.
- Das Ergebnis wird in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen eingesetzt.